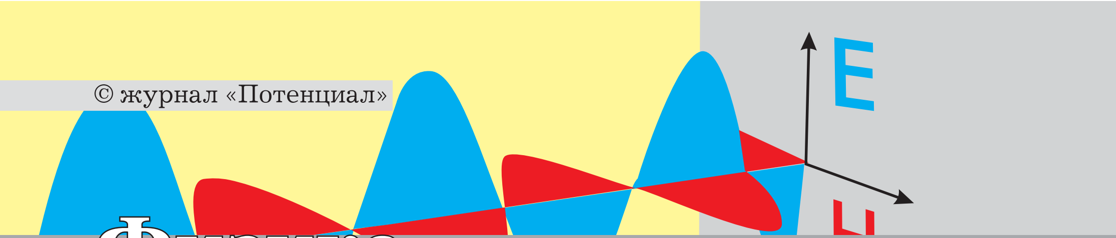
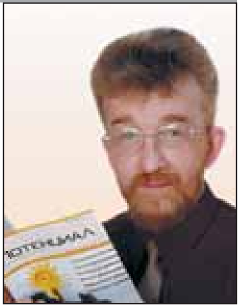




Лукьянов Андрей Александрович

Кандидат физико-математических наук, закончил физический факультет МГУ, преподаватель кафедры общей физики Московского физико-технического института (МФТИ), сотрудник РНЦ «Курчатовский институт», доцент Российского государственного социального университета.

Молекулярная физика в числах - больших и малых. Часть 1

В статье, адресованной старшеклассникам, рассмотрено несколько поучительных и, возможно, неожиданных примеров «на числа» из раздела «Молекулярная физика».

Один из величайших физиков прошлого века Ричард Фейнман однажды сказал следующее: «Если бы в результате какой-то мировой катастрофы все накопленные научные знания оказались бы уничтоженными и к грядущим поколениям живых существ перешла бы только одна фраза, то какое утверждение, составленное из наименьшего количества слов, принесло бы наибольшую информацию? Я считаю, что это – атомная гипотеза: все тела состоят из атомов – маленьких телец, которые находятся в беспрерывном движении».

Сегодня мы поговорим об атомах и о молекулах и, в частности, о том, в каком смысле они – «маленькие тельца».

Пример 1. Каковы линейные размеры атомов и молекул?

Решение. Говорить о размерах в буквальном смысле нельзя: резких границ у атомов и молекул нет. Физики иногда говорят о радиусах боровских орбит электронов в атомах. Например, радиус 1-ой (самой маленькой) орбиты электрона в атоме водорода

$$r_1 \approx 0{,}53 \cdot 10^{-10}\ \text{м}.$$

В действительности, с точки зрения квантовой теории, нет никаких орбит электронов в атомах. Можно, правда, сказать, что есть некоторый характерный размер области, в которой сосредоточен электрон. Размер этой области (размер «электронного облака») как раз порядка 10^{-10} м. В разных атомах он свой, но не слишком сильно отличающийся от величины 10^{-10} м.

Пример 2. Как представить себе малость атома?

Решение. Если взять небольшой мандарин диаметром примерно 4-5 см, то мандарин будет больше атомов, из которых он состоит, во столько же раз, во сколько сам он меньше Земли (радиус Земли $R \approx 6{,}37 \cdot 10^6$ м).

С молекулами всё несколько сложнее, потому что они бывают разные. Молекулы типа азота N_2 или кислорода O_2 (основные составляющие воздуха) характеризуются примерно теми же размерами, что и атом водорода. Принято считать, что «радиус» молекулы азота равен $1{,}9 \cdot 10^{-10}$ м. Есть, однако, молекулы и покрупнее. Это, например, сравнительно недавно открытые молекулы фуллеренов – многоатомные молекулы углерода C_n с $n \geq 60$. Так, молекула C_{60} представляет собой что-то вроде футбольного мяча, имеющего 12 пятиугольников и 20 шестиугольников с шестьюдесятью атомами углерода в вершинах. Длины сторон пятиугольников и шестиугольников равны примерно $1{,}45 \cdot 10^{-10}$ м и $1{,}38 \cdot 10^{-10}$ м, т.е. того же порядка величины, что и малые молекулы. Наконец, существуют огромные полимерные молекулы, состоящие из цепей отдельных простых молекул (например, цепь полиэтилена состоит из множества простых звеньев CH_2). Самые длинные из известных полимеров – макромолекулы ДНК. Для них число звеньев в цепи (и довольно сложных звеньев) может достигать $10^9 \div 10^{10}$.

В дальнейшем мы будем интересоваться лишь самыми простыми молекулами.

Пример 3. Рассмотрим кристалл поваренной соли NaCl. В нём атомы натрия и хлора поочерёдно занимают соседние узлы кубической решётки. Молярные массы натрия и хлора равны $\mu_{\text{Na}} \approx 23 \cdot 10^{-3}$ кг/моль и $\mu_{\text{Cl}} \approx 35{,}5 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Плотность поваренной соли $\rho \approx 2{,}2 \cdot 10^3$ кг/м^3. Оценить по этим данным размер a элементарного кубика в кристалле.

Решение. Заменим мысленно атомы Na и Cl в кристаллической решётке некими одинаковыми атомами «гипотетического» вещества со средней молярной массой

$\mu = 0{,}5 \cdot (\mu_{\text{Na}} + \mu_{\text{Cl}}) \approx 29{,}3 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

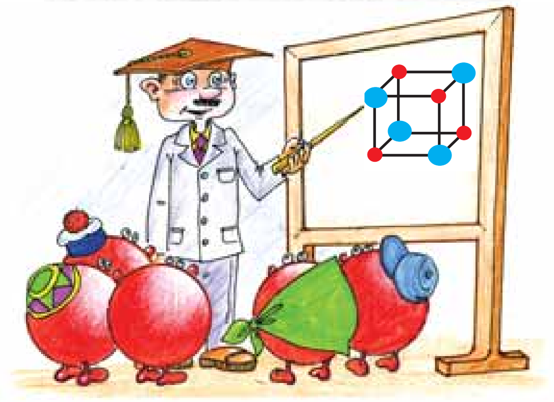
и средней массой одного атома

$$m = \mu / N_A = 4{,}86 \cdot 10^{-26} \text{ кг}$$

($N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ 1/моль – число Авогадро). Плотность кристалла, состоящего из одинаковых кубиков со стороной a, представим как $\rho = m / a^3$ (каждому элементарному кубику объёмом a^3 принадлежит один атом массой m). Отсюда найдём размер элементарного кубика

$$a = (m/\rho)^{1/3} \approx 2{,}8 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

Это есть расстояние между центрами соседних атомов.



Пример 4. Вычислить концентрацию атомов в кристалле поваренной соли.

Решение. Напомним, что по определению концентрацией частиц называется их число в единице объёма:

$n = \dfrac{N}{V}$. Здесь N – число частиц в объёме V. Поскольку на один элементарный кубик объёмом a^3 приходится один атом, то

$$n = 1/a^3 \approx 4{,}5 \cdot 10^{28}\ 1/\text{м}^3.$$

Пример 5. Сделать оценки, аналогичные примерам 3 и 4, для воды.

Решение. Здесь нет никакого элементарного кубика: молекулы жидкости «расположены» хаотически (однако, довольно тесно прижаты друг к другу). Пусть N – число молекул в объёме V, ρ – плотность воды, M – масса воды. Оценим сначала концентрацию молекул: $n = N/V$, $\rho = M/V$, поэтому $n = \rho/m$, где $m = \mu / N_A$ – масса одной молекулы:

$$m = \mu / N_\text{A} = \left[(2+16)\cdot 10^{-3}\ \text{кг/моль}\right] / \left[6{,}02 \cdot 10^{23}\ 1/\text{моль}\right] \approx 3 \cdot 10^{-26}\ \text{кг}.$$

Тогда

$$n = (10^3\ \text{кг/м}^3)/3 \cdot 10^{-26}\ \text{кг} \approx \approx 3{,}3 \cdot 10^{28}\ 1/\text{м}^3.$$

Для оценки среднего расстояния a между ближайшими молекулами в воде применим формулу $n = 1/a^3$. Хотя она получена для соседних атомов в кубической кристаллической решётке, а в жидкости упорядоченного расположения молекул нет, всё же считают, что среднее расстояние между соседними частицами характеризуется величиной $a = n^{-1/3}$. В итоге получаем:

$$a \approx 3{,}1 \cdot 10^{-10}\ \text{м}.$$

Эта величина даёт представление и о размерах молекул воды, поскольку они расположены тесно друг к другу (заметно сжать воду весьма трудно).

Пример 6. По определению идеальным газом называют «газ, обладающий такими же свойствами, как и совокупность невзаимодействующих материальных точек» [1]. Иногда приходится слышать, что для того, чтобы реальный газ считался идеальным, необходимо, чтобы он был очень-очень разреженным. Иногда ещё сравнивают молекулы в идеальном газе со звёздами на небе. А так ли уж похож на звёздное небо окружающий нас воздух – самый распространённый газ, к которому мы применяем уравнения идеального газа?

Решение. Размер («диаметр») одной молекулы воздуха (для определённости азота N_2 – его всё-таки 78% по числу частиц в объёме) мы знаем – это $d = 3{,}8 \cdot 10^{-10}$ м.

Концентрацию молекул воздуха при нормальных условиях найдём из уравнения состояния идеального газа

$$n = p/kT.$$

Здесь $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана. Положим $p = 101$ кПа и $T = 273$ К. В итоге получаем

$$n \approx 2{,}7 \cdot 10^{25}\ 1/\text{м}^3.$$

Но это лишь примерно в 1000 раз меньше числа молекул в $1\ \text{м}^3$ воды. Не так уж разрежен этот воздух! Среднее расстояние между ближайшими молекулами воздуха

$$a = n^{-1/3} \approx 3{,}3 \cdot 10^{-9} \text{ м}$$

всего лишь примерно в 9 раз больше, чем размеры молекул. Это означает, что если бы мы захотели изобразить молекулы воздуха в обычной тетрадке в клетку, то могли бы поступить так. Нарисовать кружок диаметром 0,5 см (одна клетка) и назвать это одной молекулой. А ближайшую к ней (в среднем) молекулу-кружок мы должны были бы нарисовать на расстоянии 4,5 см от неё.

Теперь – о звёздном небе. Начнём с Солнечной системы. Расстояние от Земли до Солнца примерно в 100 раз больше диаметра Солнца, но сам этот диаметр примерно в 100 раз больше диаметра Земли. Если представить Солнце в виде апельсина размером 10 см, то Землю нужно было бы представить маковкой в 1 мм, расположенной на расстоянии 10 м от апельсина. Как видите, соотношение размеров здесь совсем не такое, как в воздухе.

Но это ещё пустяки. Ближайшая к Солнцу звезда «Проксима Центавра» находится от нас на расстоянии 4,2 световых года, т.е. $\approx 4 \cdot 10^{16}$ м. По сравнению с диаметром Солнца ($1{,}4 \cdot 10^{9}$ м) это примерно в 30 миллионов раз больше. Это всё равно, как если бы два апельсина размером 10 см находились на расстоянии 3000 км друг от друга. Если бы мы попытались нарисовать Солнце в тетрадке в клетку размером в одну клетку (0,5 см), то ближайшую к нам звезду пришлось бы рисовать уже в другом городе – на расстоянии $\approx$ 140 км.

Космос в целом практически пуст. По современным данным в среднем на каждые 4 кубические метра космического пространства в целом приходится всего один (!) атом водорода (а водород – самый распространённый элемент во Вселенной). Это соответствует плотности вещества порядка $4 \cdot 10^{-28}$ кг/м^3 (масса протона – $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг).

Пример 7. А какова масса 1 м^3 воздуха при нормальных условиях?

Решение. Из уравнения Менделеева-Клапейрона следует

$$\rho = \mu p / RT, \qquad (1)$$

где R = 8,31 Дж/(К моль) – универсальная газовая постоянная, $p = 101$ кПа и T = 273 K. Что подставить здесь в качестве молярной массы? По числу частиц воздух (вблизи поверхности Земли) состоит примерно на 78% из молекул азота N_2 (с молярной массой $\mu_1 = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль), на 21% – из молекул кислорода O_2 (с молярной массой $\mu_2 = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль) и ещё примерно 1% приходится на атомы аргона Ar (молярная масса которого $\mu_3 = 40 \cdot 10^{-3}$ кг/моль). В качестве μ в формуле (1) нужно взять среднюю молярную массу, которую можно вычислить по формуле

$$\mu = 0{,}78 \cdot \mu_1 + 0{,}21 \cdot \mu_2 + 0{,}01 \cdot \mu_3 = 28{,}96 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль} \approx 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}.$$

Здесь учтён относительный вклад частиц разного сорта (их относительная концентрация). В результате для плотности воздуха имеем оценку

$$\rho \approx 1{,}3 \text{ кг/м}^3.$$

При комнатной температуре T = = 300 K мы получаем немного меньше: $\rho \approx 1{,}2$ кг/м^3. В комнате с размерами 5м$\times$ 4м$\times$ 2,5м = 50м^3 содержится примерно 60 кг воздуха, т.е. порядка массы холодильника или массы человека.

Итак, мы видим, что воздух, которым мы дышим, – это не такой уж разреженный газ. Однако он не так и плотен. Иначе он вряд ли бы подчинялся уравнениям идеального газа.

Пример 8. Оценить, какую долю объёма воздуха занимает объём молекул воздуха при нормальных условиях.

Решение. Суммарный объём всех молекул в $1\,\text{м}^3$ воздуха оценим по формуле $(4\pi/3)\cdot(d/2)^3\cdot n$ или, имея в виду оценку по порядку величины, просто $d^3\cdot n$. Эта величина порядка $0{,}001\,\text{м}^3 = 1$ литр, т.е. на долю собственно молекул в $1\,\text{м}^3$ воздуха приходится 0,1% (даже несколько меньше) общего объёма, занимаемого газом. Остальные 99,9% – пустое пространство.

В телевизионных трубках давление газа очень маленькое – порядка 10^{-9} атмосфер (в миллиард раз меньше нормального атмосферного давления). Это значит, что число частиц в единице объёма в трубке во столько же раз меньше, чем в окружающем воздухе, т.е. всего порядка $2{,}4\cdot10^{16}\,1/\text{м}^3$. Среднее расстояние между ближайшими частицами такого газа $a = n^{-1/3} \approx 3{,}4\cdot10^{-6}$ м, т.е. порядка микрона.

Пример 9. Современные вакуумные насосы позволяют понижать давление до значений 10^{-12} мм рт. ст. Оценим концентрацию и среднее расстояние между ближайшими молекулами в таком газе при комнатной температуре.

Решение. Поскольку 760 мм рт. ст. равны 101 кПа, то 1 мм рт. ст. ≈ 133 Па. Давление $p = 10^{-12}$ мм рт. ст. ≈ ≈ $1{,}33\cdot10^{-10}$ Па, т.е. примерно на 15 порядков меньше нормального атмосферного давления. Концентрация частиц в таком разреженном газе при температуре $T = 300$ K равна $n = p/kT \approx 3\cdot10^{10}\ 1/\text{м}^3$, а среднее расстояние между ближайшими частицами $a \quad n^{-1/3} \approx 0{,}3$ мм.

Пример 10. Раньше мы уже сказали, что в обычном воздухе среднее расстояние между ближайшими молекулами $a = n^{-1/3}$ всего лишь примерно в 10 раз больше размеров самих молекул. Совершенно очевидно, что в процессе своего движения молекулы будут сталкиваться друг с другом. Оценим среднее расстояние λ, которое проходит молекула между двумя последовательными столкновениями с другими молекулами.

Решение. Это можно сделать по формуле

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\,n\pi d^2}. \qquad (2)$$

Не выводя этой формулы, поясним лишь её физический смысл. На отрезке пути длиной λ между двумя последовательными столкновениями молекулы в объёме, равном $V = \pi d^2\lambda$ (это – объём маленького цилиндра «высотой» $h = \lambda$ и с диаметром основания $2d$) молекула встречает в среднем всего лишь ещё одну молекулу. То есть можно считать, что в этом объёме число молекул $N=1$. Поэтому для концентрации молекул получаем выражение

$$n = N/V = 1/\pi d^2\lambda,$$

откуда следует формула (2), правда, без множителя $\sqrt{2}$, происхождение которого несколько сложнее.

Подстановка в формулу (2) значения концентрации

$$n \approx 2{,}7\cdot 10^{25}\ 1/\text{м}^3$$

(для воздуха при нормальных условиях) и диаметра молекулы азота $d = 3{,}8\cdot 10^{-10}$ м даёт значение λ всего $\approx 5{,}6\cdot 10^{-8}$ м $\approx 0{,}06$ мкм. Однако это приблизительно в 17 раз больше среднего расстояния между ближайшими молекулами $a = n^{-1/3} \approx$ $\approx 3{,}3\cdot 10^{-8}$ м и примерно в 150 раз больше размеров молекул. Попытаемся мысленно изобразить это снова на тетрадном листе в клетку. Молекулы теперь будем изображать точками в узлах клеток. Изобразим сначала две ближайшие в среднем друг к другу молекулы в виде двух точек в соседних узлах. Расстояние между ними в тетрадке составит 0,5 см (это будет наше $a = n^{-1/3}$). Чтобы показать теперь молекулу на расстоянии λ от какой-либо из них, надо поставить точку на расстоянии примерно 8,5 см от неё.

Если к сказанному добавить, что при нормальных условиях каждую секунду любая молекула воздуха испытывает в среднем порядка 10^{10} столкновений с другими молекулами воздуха, то становится ясно, что воздух далёк от картины невзаимодействующих точек. Впору удивляться тому, что к нему всё же с хорошей точностью применимы уравнения и формулы идеального газа.

Литература

1. Кикоин И.К., Кикоин А.К. Молекулярная физика. – М.: Наука, 1963. – 500 с.;

2. Перельман Я.И. Занимательная механика. Знаете ли вы физику? – М.: АСТ, 2001. – 464 с.;

3. Физика: 3800 задач для школьников и поступающих в вузы/Авторы-составители: Турчина Н.В, Рудакова Л.И., Суров А.И, Спирин Г.Г., Ющенко Т.А. – М.: Дрофа, 2000. – 672 с.